Enseñanza de la probabilidad:

simulación con Geogebra, juegos y toma de decisiones

Objetivo:

Brindar a los docentes estrategias de uso de recursos tales como material concreto y GeoGebra, para la enseñanza de la probabilidad de manera interactiva y visual. Se enfatiza en la comprensión de los conceptos básicos de probabilidad y se propone la reflexión sobre cómo este concepto tiene repercusiones y aplicaciones directas en la sociedad. Se proporcionan ejemplos didácticos y divertidos para que puedan implementar en el aula de manera efectiva.

Estructura del curso

1. Introducción y Conceptos básicos

- Bienvenida y objetivos del taller.
Se explica la importancia de enseñar probabilidad desde un enfoque lúdico, así como la utilidad de las herramientas digitales para hacer que los conceptos abstractos sean más accesibles.

- ¿Qué es la probabilidad?

Presentamos el concepto de probabilidad y cómo se relaciona con situaciones cotidianas. Por ejemplo, en los pronósticos del tiempo, seguro de automóviles, juegos de azar.

- GeoGebra:

Breve descripción de GeoGebra. Recursos de Probabilidad. Exploración inicial: Los participantes exploran las herramientas de GeoGebra, familiarizándose con la interfaz.
Usamos una simulación interactiva de lanzamiento de monedas en GeoGebra:
https://www.geogebra.org/m/ZQv4tnhU

Cada participante podrá ejecutar la simulación en su dispositivo y observar cómo los resultados se aproximan a la probabilidad teórica a medida que se aumenta el número de lanzamientos.

---

2. El juego como Metodología de Enseñanza

El origen de la probabilidad ligado a los juegos de azar permite una aproximación lúdica a los conceptos elementales. Se propone inicialmente, el uso de material manipulativo, para experimentar y familiarizarse con los juegos. Luego se incorpora la simulación con GeoGebra para la obtención de conclusiones.
Algunos juegos permiten además elaborar estrategias, luego de analizar la probabilidad de ganar. Estas estrategias constituyen una introducción a la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

- Juego 1: Travesía del río

Este juego se basa en el lanzamiento de dos dados y la suma de las caras. A partir de material concreto y simulación, es posible visualizar y experimentar con lanzamientos de dos dados para explorar la suma de los resultados, estudiar la probabilidad y observar patrones en los resultados de cada suceso. El juego permite hacer predicciones sobre la probabilidad de obtener ciertos números o combinaciones en un lanzamiento doble. Mediante simulaciones repetidas se pueden verificar los resultados esperados y compararlos con los resultados empíricos.

Lanzamiento de un solo dado: https://www.geogebra.org/m/TCGCtnWA

200 lanzamientos https://www.geogebra.org/m/Vw9Q7RkE

Lanzamiento de dos dados: https://www.geogebra.org/m/evxagmhw

https://www.geogebra.org/m/ga3xymke#material/Kt952EbV

- Juego 2: Ruletas

Los juegos con ruletas permiten explorar la probabilidad de eventos sencillos y elaborar estrategias cuando se trata de juegos que involucran más de un jugador. En las simulaciones con GEoGebra es posible modificar las proporciones de colores en la ruleta y observar cómo afecta a las probabilidades.

Una vez exploradas las simulaciones, se proponen juegos con diferentes ruletas en donde el objetivo es encontrar una estrategia de elección de la ruleta que más chance tiene de ganar.

Una sola ruleta: https://www.geogebra.org/m/ZDuHq64w

Una ruleta y gráfico de barras: https://www.geogebra.org/m/WCdF9VHU

Dos ruletas: https://www.geogebra.org/m/RyfTuQCK

---

3. Aplicaciones de la Probabilidad

Se explica cómo la probabilidad influye en decisiones cotidianas, como el uso de pronósticos del tiempo, el cálculo de riesgos en seguros, o las probabilidades de éxito de diferentes estrategias en juegos de azar. Esta sección ayudará a los docentes a conectar el concepto con situaciones concretas de la vida real.

- Aplicaciones en diferentes áreas:
Se presentan aplicaciones de la probabilidad en diversas áreas:

- Medicina: Análisis de riesgos y diagnósticos.
- Economía: Predicciones financieras y seguros.
- Ingeniería: Fiabilidad de sistemas y control de calidad.
- Educación: Distribución de recursos educativos: Planificación de la demanda. Predicción del rendimiento académico

Se discute sobre la importancia de enseñar a los estudiantes a interpretar situaciones probabilísticas y a tomar decisiones informadas en base a probabilidades.

---

4. Discusión y Conclusiones en General

- **Discusión abierta:**
Espacio para que los participantes compartan sus impresiones sobre las actividades realizadas. Se discuten ideas para adaptar estos juegos y simulaciones a las clases de secundaria.

- **Conclusiones:**

Reflexión sobre la importancia de utilizar enfoques lúdicos y tecnológicos en la enseñanza de la probabilidad, y sobre cómo estos pueden ayudar a mejorar la comprensión de conceptos abstractos entre los estudiantes.

- **Cierre y entrega de recursos:**

Se proporcionan enlaces a las simulaciones usadas en el taller, así como otros materiales adicionales para que los docentes los implementen en sus clases.

Materiales Requeridos para el Taller:

- Navegador web con GeoGebra instalado o acceso a la versión en línea

---

Contactos:

lavalle.andrea@faea.uncoma.edu.ar

roxanna.zuliani@faea.uncoma.edu.ar

ANEXOS

1. Introducción y Conceptos básicos

GUÍA PARA EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD DE LA MONEDA

El lanzamiento de una moneda es una herramienta simple y efectiva para aproximar las definiciones frecuencial y clásica de probabilidad. Mediante repeticiones y simulaciones de lanzamientos, los participantes pueden observar cómo las frecuencias relativas de cada resultado —cara o cruz— se acercan a la probabilidad teórica. Esta actividad permite explorar el concepto de azar y comprender cómo la probabilidad describe la tendencia de los resultados a estabilizarse en proporciones constantes cuando el número de lanzamientos es lo suficientemente grande.

1. Experimentar con la simulación interactiva de GeoGebra: Lanzar una moneda

   https://www.geogebra.org/m/ZQv4tnhU

   a) Calcular la probabilidad teórica de obtener "cara"
   b) Realizar una serie de 3, 10, 50, 100 y 500 lanzamientos y observar la frecuencia relativa de las veces que aparece "cara" de manera visual y en tiempo real.

2. Reflexión y preguntas para analizar:
   a) ¿Qué sucede con las frecuencias relativas a medida que aumenta el número de lanzamientos?
   b) Reflexiona sobre cómo el azar influye en cada lanzamiento individual y cómo, sin embargo, al aumentar el número de repeticiones, los resultados tienden a estabilizarse y a acercarse a la probabilidad teórica
   c) ¿Qué sucede cuando se realizan pocos lanzamientos? ¿Se observa mucha variabilidad?
   d) ¿Por qué es importante el concepto de probabilidad frecuencial en situaciones de azar?
   e) ¿En qué situaciones de la vida cotidiana vemos esta aproximación de las frecuencias relativas a una probabilidad teórica?
3. Actividades complementarias:

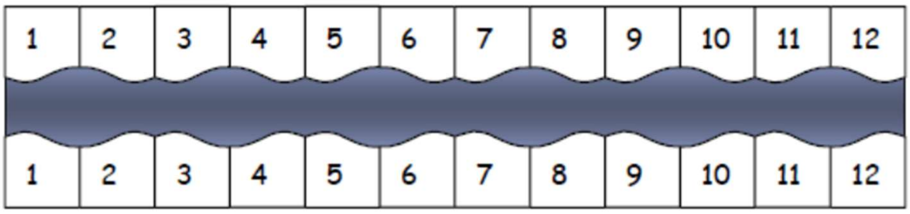
   a) Graficar la frecuencia relativa en función del número de lanzamientos

   b) Construir un histograma de resultados

2. JUEGOS DE PROBABILIDAD

JUEGO "TRAVESÍA EN EL RÍO"

Cada jugador dispone de 12 fichas. Uno de ellos las sitúa de un lado del río y el otro en el lado opuesto. Las fichas se distribuyen en las casillas correspondientes de la manera que se desee. Por turnos se lanzan los dados y se suman los puntos de las caras. Si coincide con una casilla en la que hay fichas, una de ellas puede pasar al otro lado del río. Gana el primero que pasa al otro lado todas sus fichas.



GUÍA PARA EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD: "TRAVESÍA EN EL RÍO"

Este juego puede utilizarse para abordar contenidos con diferente nivel de complejidad. En la siguiente guía presenta diferentes abordajes. Por un lado, sirve para estimar la probabilidad de que salga cada uno de los números del dado, a través de la frecuencia relativa. En ese caso, si los estudiantes ya han realizado experiencias con un dado o con una moneda, se puede obviar el punto 2 de la guía. Por otro lado, si no lo han hecho, esta actividad se puede complementar con una simulación en GeoGebra:

Simulación del lanzamiento de un solo dado: https://www.geogebra.org/m/TCGCtnWA

Simulaciones de 200 lanzamientos: https://www.geogebra.org/m/Vw9Q7RkE

En el punto 1, los estudiantes eligen dónde poner las fichas y toman datos de su experiencia. En la toma de datos se pide explícitamente que identifiquen el resultado de cada dado, por lo tanto, los dados deben poder ser diferenciados por color o tamaño. La finalidad es que se reconozca la diferencia entre, por ejemplo, el resultado (2, 3) y el resultado (3, 2). O que el resultado de suma 2 es único.

En el punto 4 se pide repetir el juego teniendo en cuenta los resultados obtenidos. Se espera que elaboren alguna estrategia.

Luego de realizar dos veces el juego se reúnen todos los datos del curso en una única tabla de frecuencias (punto 5 y 6) y se grafican (punto 7).

En el punto 8 se presenta un diagrama de árbol que se utiliza para identificar todos los resultados posibles. Introduce un gráfico útil en el estudio de la probabilidad.

El punto 9 permite construir un gráfico de barras absolutas con la cantidad de resultados posibles para cada valor de suma. Esto permite contestar las preguntas de los puntos 10, 11 y 12. Tener en cuenta que hasta aquí se trabajan frecuencias absolutas.

Esta actividad se complementa con simulación en GeoGebra del lanzamiento de dos dados en la que se obtienen frecuencias relativas.

Simulación lanzamiento de dos dados: https://www.geogebra.org/m/evxagmhw

https://www.geogebra.org/m/ga3xymke#material/Kt952EbV

Las actividades de Ampliación permiten formalizar el cálculo de probabilidades e introducir el concepto de esperanza matemática.

Consideraciones:

Las frecuencias empíricas de cada resultado posible pueden variar considerablemente. Esto es parte del aprendizaje.

La estrategia no siempre es efectiva, puede garantizar una mayor probabilidad de ganar, pero se puede perder. Es parte del juego y del azar.

Las simulaciones en GeoGebra permiten concluir que, aun realizando un gran número de repeticiones, podemos no llegar a la probabilidad teórica.

---

1. Realiza el juego y anota los resultados:

Tirada	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
Dado 1																									
Dado 2																									
Suma																									

2. Realiza un gráfico de bastones con los resultados del Dado 1 y otro con los resultados del Dado 2.

3. Realiza también el gráfico de bastones con los valores obtenidos de la suma de las caras:

4. Analiza los resultados obtenidos y repite el juego eligiendo convenientemente la ubicación de las fichas. Si cambiaste la distribución de las fichas explica por qué.

Tirada	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
Dado 1																									
Dado 2																									
Suma																									

5. En la siguiente tabla indica la cantidad de veces que obtuviste cada valor de suma en **ambas** experiencias. (Tabla 5)

Suma		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Total grupo												

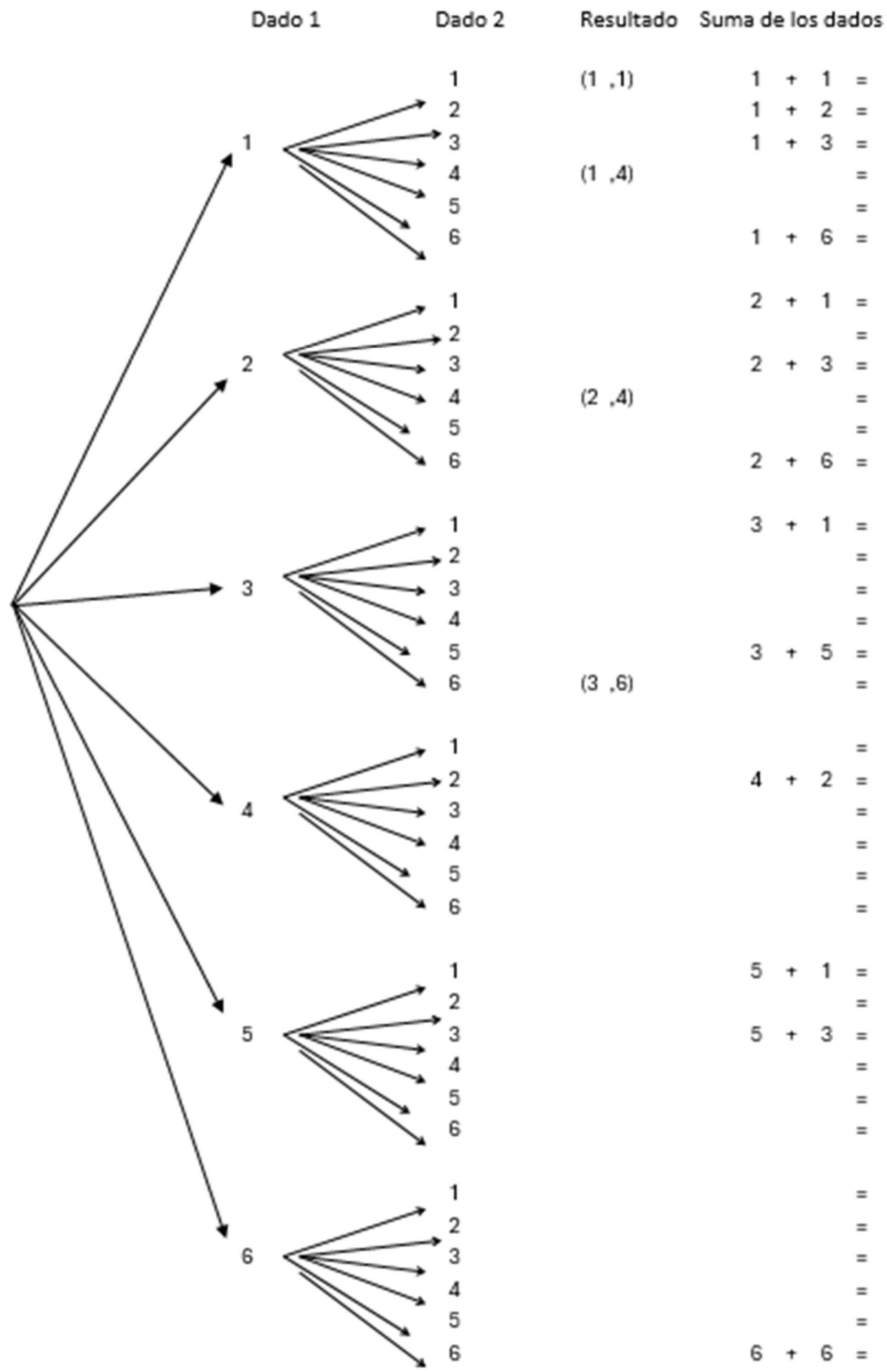
6. Completamos las siguientes tablas con los resultados obtenidos por todos los grupos (tabla 5 de cada grupo):

Suma	Grupos																				Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					
11																					
12																					

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Total curso											

7. Construye el gráfico de bastones de la suma de los dados con los resultados experimentales del curso (gráfico experimental)

8. Completa el árbol con todas las posibilidades


Dado 1
Dado 2
Resultado
Suma de los dados
1
1 (1 ,1) 1 + 1 =
2 1 + 2 =
3 1 + 3 =
4 (1 ,4) =
5 =
6 1 + 6 =
2
1 2 + 1 =
2 =
3 2 + 3 =
4 (2 ,4) =
5 =
6 2 + 6 =
3
1 3 + 1 =
2 =
3 =
4 =
5 3 + 5 =
6 (3 ,6) =
4
1 =
2 4 + 2 =
3 =
4 =
5 =
6 =
5
1 5 + 1 =
2 =
3 5 + 3 =
4 =
5 =
6 =
6
1 =
2 =
3 =
4 =
5 =
6 6 + 6 =

9. Construye el gráfico de bastones de la suma de los dados con los resultados del árbol de posibilidades (gráfico "ideal").

10. Compara los resultados del gráfico experimental de todo el curso con el del gráfico ideal.

11. Según este último gráfico, ¿qué resultado es el más esperado al lanzar los dados y sumar el puntaje?

12. ¿Existe alguna forma de ubicar las fichas en el juego para que tengas mejor chance de ganar?

Ampliación

1. Realizar las comparaciones en forma relativa (frecuencia relativa).
2. Calcular (utilizando la definición clásica) la probabilidad de cada uno de los resultados posibles del experimento de lanzar dos dados.
3. Calcular (utilizando la definición clásica) la probabilidad de cada uno de los valores de la suma de las caras.
4. En cada paso de experimentación calcular el promedio empírico para introducir esperanza.
5. Utilizar diferentes dados (de 4 caras, 8 caras, …)

GUÍA PARA EL DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES CON RULETAS

Los juegos con ruletas se utilizan como aproximación a las definiciones frecuencial y clásica de probabilidad. A través de juegos y simulaciones se construye el concepto de probabilidad geométrica. En este concepto, en la definición clásica de probabilidad como cociente entre el número de resultados favorables sobre el número de resultados posibles (en un espacio equiprobable) se modifica número por medida.

1. Experimentar con las actividades de GeoGebra

Una sola ruleta: https://www.geogebra.org/m/ZDuHq64w

En esta simulación se puede elegir el número de sectores de la ruleta y mediante repeticiones, obtener frecuencias relativas para estimar la probabilidad de cada sector.

Una ruleta y gráfico de barras: https://www.geogebra.org/m/WCdF9VHU

En esta simulación, además de poder cambiar el número de sectores, se van obteniendo las frecuencias relativas

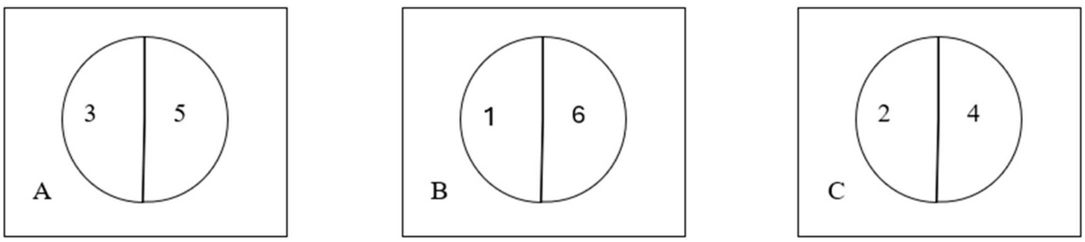
Dos ruletas: https://www.geogebra.org/m/RyfTuQCK

Es una simulación muy simple con dos ruletas. Introduce la comparación de probabilidades que se utiliza en los juegos presentados a continuación.

En cada caso, luego de analizar las frecuencias relativas, calcular probabilidades con la definición clásica.

2. Tres Ruletas

Se presenta el siguiente juego: El primer jugador elige una de las tres ruletas. El segundo elige una de las dos que quedan. Si hay un tercer jugador, debe elegir la que queda. Se hacen girar las ruletas y gana el que mayor puntuación obtiene.



En cada jugada registrar:

- Ruleta elegida por el primer jugador
- Ruleta elegida por el segundo jugador
- Resultados obtenidos
- Ganador

Analizar las frecuencias relativas y tratar de establecer una estrategia.

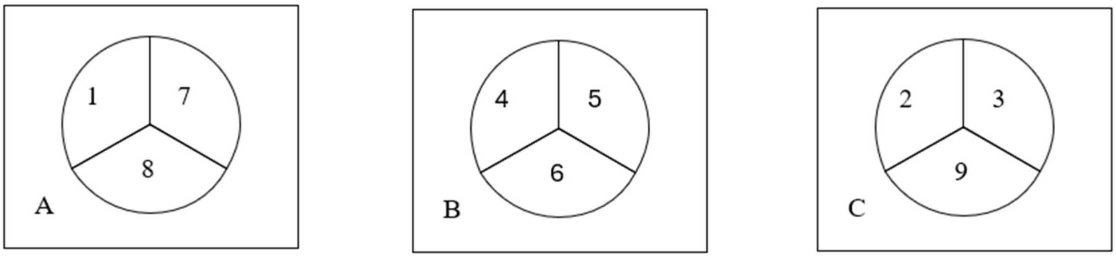
Para formalizar, completar:

RULETAS ELEGIDAS	**RESULTADO**	**PROBABILIDAD DEL RESULTADO**	**QUIÉN GANA**
	A B		
A y B	3 1	½ * ½ = ¼	A
	3 6		
	5 1		
	5 6		
	A C		
A y C			
….			
B y C			

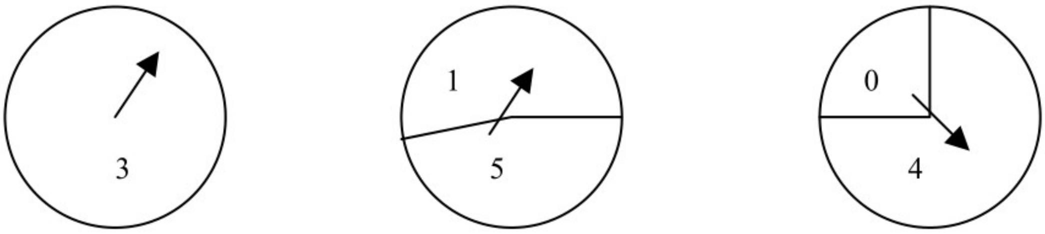
Si te toca elegir primero, ¿qué ruleta elegirías?

¿Y si te toca elegir segundo?

Repetir con el siguiente grupo de ruletas:



3. Se dispone de tres ruletas como las de la figura. En el juego participan dos jugadores. Se sortea el turno para elegir la ruleta y a continuación cada uno lanza la ruleta elegida. Gana el que mayor puntaje obtiene. ¿Existe alguna estrategia ganadora? El ángulo correspondiente al sector 1 es de 183,6°.



A **B** **C**

(En este juego es posible observar, al encontrar la estrategia, la **no transitividad** en probabilidad)

3. Aplicaciones de la Probabilidad

Medicina: Análisis de riesgos y diagnósticos

En el campo médico, la probabilidad es fundamental para evaluar riesgos y hacer diagnósticos precisos. A través de la estadística médica, se pueden calcular probabilidades para prever la ocurrencia de enfermedades en base a factores de riesgo como edad, hábitos de vida o antecedentes familiares. Algunas aplicaciones clave incluyen:

- **Pruebas diagnósticas:** La probabilidad se utiliza para interpretar los resultados de pruebas médicas, como el valor predictivo positivo (la probabilidad de que un paciente tenga la enfermedad si el test es positivo) o el valor predictivo negativo (la probabilidad de no tener la enfermedad si el test es negativo). Esto ayuda a los médicos a tomar decisiones más informadas.
- **Modelos de supervivencia:** Los modelos probabilísticos ayudan a calcular la probabilidad de supervivencia de pacientes con ciertas condiciones, lo que es crucial en la toma de decisiones clínicas.

Economía: Predicciones financieras y seguros

La probabilidad es una herramienta esencial en la economía para evaluar riesgos y hacer predicciones. Dos aplicaciones destacadas incluyen:

- **Predicciones financieras:** Los analistas financieros usan modelos probabilísticos para predecir el comportamiento del mercado, como los precios de las acciones o las tasas de interés. Esto les permite evaluar la volatilidad de los mercados y la probabilidad de éxito de inversiones específicas.
- **Seguros:** En las compañías de seguros, se utiliza la teoría de la probabilidad para calcular las primas basadas en el riesgo. Por ejemplo, se calcula la probabilidad de que un accidente o enfermedad ocurra en función de factores como la edad, el estado de salud o el historial de conducción, permitiendo a las aseguradoras ajustar el costo de las pólizas.

Ingeniería: Fiabilidad de sistemas y control de calidad

En ingeniería, la probabilidad es esencial para evaluar la fiabilidad de sistemas y garantizar la calidad de los productos. Algunas aplicaciones incluyen:

- **Fiabilidad de sistemas:** Los ingenieros calculan la probabilidad de falla de componentes en sistemas complejos (como aviones o centrales eléctricas). Esto les permite diseñar sistemas más seguros y predecir el tiempo de vida útil de las piezas.
- **Control de calidad:** Las empresas de manufactura usan técnicas probabilísticas, como el muestreo estadístico, para verificar la calidad de los productos sin tener que revisarlos

todos. Se toman muestras aleatorias de una producción en serie para estimar la probabilidad de que los productos cumplan con los estándares de calidad.

Educación: Distribución de recursos educativos: Planificación de la demanda

En el ámbito administrativo, las instituciones educativas a menudo deben prever cuántos recursos (libros, computadoras, aulas, etc.) necesitarán en un determinado ciclo escolar. La probabilidad juega un papel clave en la planificación de estos recursos.

- **Ejemplo concreto**: Supongamos que en una escuela, históricamente, entre 10% y 15% de los estudiantes de primer año de secundaria han necesitado libros de matemáticas adicionales porque no los compraron o los perdieron. La administración puede usar estos datos históricos para calcular la **probabilidad de demanda futura**.
- **Cálculo probabilístico**: Si se espera una inscripción de 200 estudiantes de primer año, y la probabilidad de que un estudiante necesite un libro adicional es de 10% a 15%, los administradores pueden estimar que entre 20 y 30 estudiantes necesitarán un libro adicional. Así, la escuela podría pedir un número suficiente de libros adicionales para cubrir esa demanda, sin ordenar demasiados ni quedarse corta en el suministro.
- **Optimización de recursos**: Este uso de la probabilidad permite a la escuela tomar decisiones **eficientes** sobre la cantidad de recursos a adquirir. Por ejemplo, si la probabilidad histórica de que las computadoras sean necesarias en el laboratorio es baja en los meses de invierno, la escuela puede planificar el uso de las computadoras en otras áreas o eventos en ese período.

Este análisis de probabilidad aplicado a la distribución de recursos ayuda a optimizar los costos, evitar la escasez de materiales y garantizar que todos los estudiantes tengan acceso a lo que necesitan.

Educación: Predicción del rendimiento académico

- **Análisis de datos históricos:** En algunas escuelas o universidades, los administradores y profesores utilizan la probabilidad para predecir el rendimiento futuro de los estudiantes. Analizan datos históricos como las calificaciones, asistencia, participación en clases y otras variables, y calculan la probabilidad de que ciertos estudiantes tengan éxito en un curso o necesiten apoyo adicional.
- **Ejemplo concreto:** Supongamos que una universidad ha recopilado información de los últimos 5 años sobre los estudiantes que aprobaron o reprobaron un curso de matemáticas. Se observa que los estudiantes con una asistencia inferior al 80% tienen una probabilidad del 60% de reprobar el curso. Usando estos datos, los profesores pueden identificar a los estudiantes con asistencia **baja en el presente y calcular su probabilidad de fracaso académico si no mejoran su asistencia.**
- **Toma de decisiones:** Este tipo de análisis permite a los docentes y administradores tomar medidas preventivas, como ofrecer tutorías adicionales o avisar a los estudiantes en riesgo para que mejoren su rendimiento. Es un uso directo de la probabilidad para

mejorar los resultados educativos mediante la intervención temprana basada en datos concretos.

Este ejemplo muestra cómo la probabilidad también puede ayudar en la gestión académica y en la toma de decisiones informadas para mejorar el rendimiento de los estudiantes.

---

4. Discusión y Conclusiones en General

Entrega de Recursos:

Les dejamos algunas sugerencias de sitios gratuitos en los que podrán acceder a una gran cantidad de actividades, lecciones y simulaciones. Estos sitios ofrecen excelentes recursos para integrar simulaciones interactivas en las clases de probabilidad y ayudar a los estudiantes a experimentar y comprender los conceptos clave de una manera visual y práctica.

- **Shodor Education Foundation**
  Shodor es una organización educativa que ofrece herramientas interactivas y simulaciones en matemáticas y ciencias, diseñadas para facilitar el aprendizaje en estudiantes y docentes. Su recurso destacado: *Interactivate*, permite explorar conceptos de probabilidad, estadísticas, álgebra y geometría de forma visual y práctica.
  Enlace: http://www.shodor.org

- **Maths is Fun - Probabilidad**
  Maths is Fun es una plataforma educativa en línea que ofrece numerosos recursos didácticos, como juegos, ejercicios y explicaciones paso a paso sobre una amplia variedad de temas. Aunque menos interactiva que otras plataformas, es ideal para docentes y estudiantes que buscan explicaciones claras y accesibles en probabilidad, geometría y estadística.
  Enlace: https://www.mathsisfun.com

- **ThatQuiz**
  ThatQuiz es una plataforma educativa en línea que permite crear y asignar pruebas, ejercicios y actividades en diversas materias como matemáticas, ciencias, idiomas y estudios sociales. Es especialmente útil para la enseñanza de las matemáticas, facilitando la generación de ejercicios y la visualización rápida del resultado.
  Enlace: https://www.thatquiz.org

5. Otras dos propuestas para el aula

Juegos de letras

A continuación, se incluyen dos situaciones que pueden ser utilizadas en el aula. La finalidad de estas actividades es que los alumnos vinculen las nociones de frecuencia relativa y probabilidad.

- **SITUACIÓN 1**

Seguramente, ustedes saben jugar al ahorcado. Un jugador (A) elige una palabra y marca en un papel un lugar para cada una de las letras de esa palabra. Otro jugador (B) arriesga letras para descubrirla. Por cada error que se comete, se dibuja una parte del cuerpo del ahorcado. Si el jugador (B) descubre la palabra gana un punto, si no, resulta ahorcado; en cualquier caso, se vuelve a jugar y es el turno del jugador (B) para elegir una nueva palabra.

Primera etapa (en grupos de dos): Jueguen varias partidas entre dos compañeros.

Segunda etapa (Individual): Si desafiaras a un compañero nuevo, y tuvieras que elegir alguna de estas palabras: caramelos, elefantes, inscripto o expresión, ¿cuál elegirías? ¿por qué?

Tercera etapa (en grupos de tres o cuatro integrantes): ¿Hay algunas letras con las que conviene empezar a jugar? En un afiche, escriban cuáles elegirían y expliquen por qué.

Cuarta etapa: Puesta en común.

- **SITUACIÓN 2**

Si se eligen 10 líneas de texto en un libro, después se cuentan las letras y la cantidad de letra a en esas líneas y se calcula el cociente entre la cantidad de letras a y la cantidad total de letras, se encuentra un valor no muy distinto de 0,12. Si lo desean, y tienen paciencia, pueden comprobarlo.

En castellano hay letras que aparecen con mayor frecuencia que otras y tomando muestras de distintos libros al azar es posible comprobar que esta frecuencia no varía mucho, aunque varíen los textos. En la siguiente tabla se muestran las frecuencias relativas porcentuales.

E 16,78 %	**N** 7,01 %	**T** 3,31 %	**Y** 1,54 %	**G** 0,73 %	**Ñ** 0,29 %	**A** 11,96 %
D 6,87 %	**C** 2,92 %	**Q** 1,53 %	**F** 0,52 %	**Z** 0,15 %	**O** 8,69 %	**R** 4,94 %
P 2,77 %	**B** 0,92 %	**V** 0,39 %	**X** 0,06 %	**L** 8,37 %	**U** 4,80 %	**M** 2,12 %
H 0,89 %	**J** 0,30 %	**K** 0,00 %	**S** 7,88 %	**I** 4,15 %		

Extraída de *Estudio lexiconométrico del diario El País*, Madrid, de E. Fontanillo, en el que se toman como muestra los ejemplares del diario durante una semana (52619 letras en total).

Primera etapa (individual): Basándose en la información de la tabla, ¿qué letras elegirías cuando te toca proponer una palabra para jugar al ahorcado? Escribí una lista con 10 palabras.

Segunda etapa (en grupos de tres o cuatro integrantes): Comparen las listas que propusieron y elaboren conclusiones.

Tercera etapa: puesta en común.

Juego con urnas

Contenidos a abordar:

Experimento aleatorio y carácter imprevisible del azar
Noción de sucesos
Estimación de la probabilidad mediante la frecuencia relativa
Búsqueda de estrategias
Comparación de frecuencias relativas
Simulación de un experimento en dos etapas

Propósitos:

Estudiar un experimento aleatorio en dos etapas
Utilizar la frecuencia relativa como estimación de la probabilidad
Proponer estrategias y sacar conclusiones acerca de cuál conviene
Realizar la experiencia y registrar convenientemente los datos

Descripción de la actividad:

- Primera parte:

Los alumnos trabajan en grupos y leen el enunciado:

*Esta es la historia del príncipe que, cansado de su astrólogo y de sus vanas promesas, decidió hacerlo ejecutar. Sin embargo, buen príncipe en el fondo, le dio una última oportunidad. Autorizó al astrólogo a repartir cuatro bolas, dos blancas y dos negras, entre dos urnas iguales. El verdugo **escogerá una de las urnas** y **extraerá una bola**: si es negra será ejecutado; si no, salvará su vida.*

a) ¿De qué manera podrías colocar las bolillas en las urnas? Escribe todas las que se te ocurran.
b) ¿Crees que hay una forma que convenga más? ¿Por qué?

- Segunda parte:

Se entrega a cada grupo dos cajas iguales, dos bolillas blancas y dos negras.

a) De acuerdo con tu suposición, elige una estrategia y realiza simulaciones de la misma. ¿Cómo harías para escoger la urna al azar?
b) ¿Qué datos es útil registrar? Anota los resultados obtenidos al realizar 30 simulaciones.

c) ¿Qué porcentaje de veces fue escogida la urna 1? ¿Y la urna 2?
d) ¿Qué porcentaje de veces el astrólogo se salvó?
e) ¿Te parece que tu estrategia es la más recomendable? Prueba con otras para poder comparar.

- Tercera parte:

El docente debe intentar que los grupos prueben la mayor cantidad de estrategias posibles para poder comparar los resultados de todas las estrategias y de todas las simulaciones hechas por los grupos.

Se reúnen los resultados en el pizarrón (asegurarse de tener un buen número de repeticiones) y a continuación se pide lo siguiente:

a) Calcula la frecuencia relativa de los sucesos: *urna 1*, *urna 2*, *salvarse* y *no salvarse* en cada estrategia.
b) Compara los resultados obtenidos por el grupo con los tuyos. ¿Qué opinas?
c) Construye un gráfico apropiado.
d) En base a los resultados de todo el curso, ¿qué le recomendarías al astrólogo?

Intervenciones del docente:

El docente guía la actividad y la puesta en común. Debe asegurarse de que los grupos prueben varias estrategias y realicen un buen número de repeticiones de cada una.

Puede ayudar también en la construcción de la planilla de registro de datos, por ejemplo:

Estrategia 1: Urna 1: ○ ● Urna 2: ○ ●	Número de simulación	Urna	Bolilla	Acción
	1	1	B	se salva
	2	1	N	no se salva
	⋮	⋮	⋮	⋮
Estrategia 2: Urna 1: ... Urna 2: ...	Número de simulación	Urna	Bolilla	Acción
	1			
	2			
	⋮			

En el desarrollo de la actividad el docente puede intervenir en los grupos con las siguientes preguntas:

¿Se puede adivinar el resultado que saldrá en la próxima extracción?

¿Existe una regla o patrón en el orden en que aparece un color determinado?

Si un color aparece tres veces seguidas, ¿es más probable que la próxima bola sea del otro color?

Finalmente, el docente luego de conducir la puesta en común institucionaliza los contenidos.

Ampliaciones:
Si se registran los datos como en la planilla, los mismos pueden resumirse mediante una tabla de frecuencias conjuntas para cada estrategia:

Estrategia N° ...

urna \ color	B	N	
U1			
U2			

Luego se puede avanzar calculando los siguientes porcentajes:

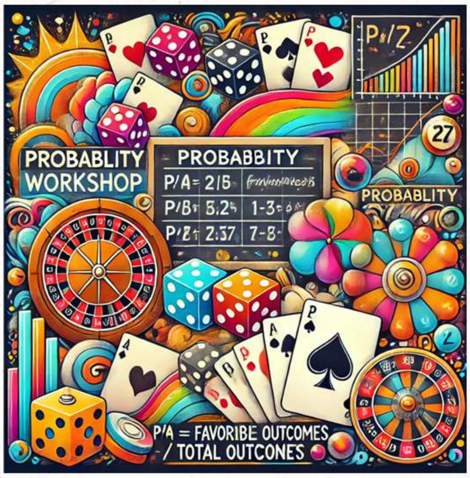
urna 1 y bola blanca
urna 1 y bola negra
urna 2 y bola blanca
urna 2 y bola negra
bola blanca dado que se seleccionó la urna 1
bola negra dado que se seleccionó la urna 1
bola blanca dado que se seleccionó la urna 2
bola negra dado que se seleccionó la urna 2

Se puede introducir el diagrama de árbol como esquema que posibilita la visualización de las estrategias.

VI Jornadas Argentinas de Educación Estadística

Enseñanza de la probabilidad: simulación con GeoGebra, juegos y toma de decisiones

Andrea Lavalle – Paola Zuliani



1

"

Explicaremos la importancia de enseñar probabilidad desde un enfoque lúdico, así como la utilidad de las herramientas digitales para hacer que los conceptos abstractos sean más accesibles.

Probabilidad

.

Juego

.

Herramientas digitales

.

2

PROBABILIDAD

JUEGO DE AZAR

EVENTO ALEATORIO

$P(\omega) = \frac{1}{\# \, \Omega}$ **Definición Clásica** $P(A) = \frac{\# A}{\# \, \Omega}$

Definición Frecuencial

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_A}{n} = P(A)$$

OBSERVACIÓN EMPÍRICA

REPETICIÓN DE EXPERIMENTOS

CONEXIÓN CON LA EXPERIENCIA – SIMULACIONES

3

3

GEOGEBRA

ACCESIBILIDAD

Gratuito

Múltiples plataformas

Facilidad de Uso

ESTIMULACIÓN DEL PENSAMIENTO CRÍTICO

Permite que los estudiantes experimenten y analicen resultados a partir de sus propias simulaciones y conjeturas.

GeoGebra

GeoGebra
Software Dinámico de Matemáticas

4

4

Travesía del río

Cada jugador dispone de 12 fichas. Uno de ellos las sitúa de un lado del río y el otro en el lado opuesto. Las fichas se distribuyen en las casillas correspondientes de la manera que se desee. Por turnos se lanzan los dados y se suman los puntos de las caras. Si coincide con una casilla en la que hay fichas, una de ellas puede pasar al otro lado del río. Gana el primero que pasa al otro lado todas sus fichas.

Travesía del río

Travesía del río

- Un dado
- https://www.geogebra.org/m/TCGCtnWA
- https://www.geogebra.org/m/Vw9Q7RkE
- Espacio muestra equiprobable

Travesía del río

Tirada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Dado 1																									
Dado 2																									
Suma																									

Suma	Frecuencia
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Travesía del río

Analizar

- Considerar que algunos pueden colocar fichas en el 1
- Considerar que se puede poner más de una ficha por casilla
- ¿Cómo se puede obtener una suma igual a 5?
- ¿Qué valor de suma se obtuvo más veces?
- ¿Cómo pondrías las fichas para un nuevo juego?

Travesía del río

- Repetir el juego, registrando nuevamente los resultados
- Juntar los resultados de todos los grupos
- Graficar

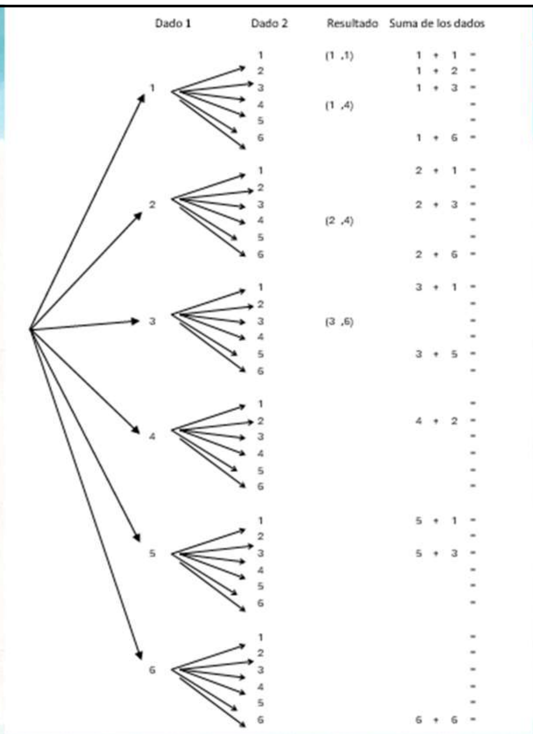
Travesía del río

Suma	Grupos																				Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					
11																					
12																					

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Total curso											

Travesía del río

- Conteo de resultados
- Diagrama de árbol



Travesía del río

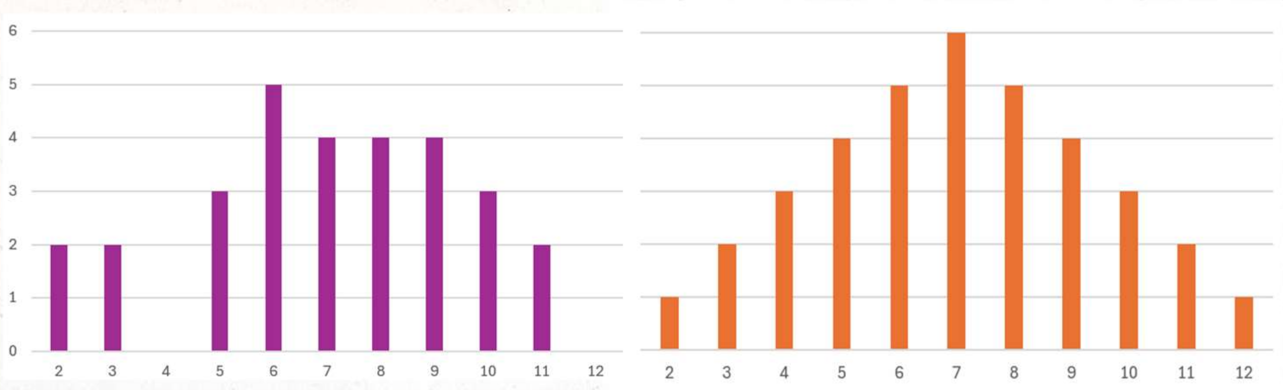
	Dado 2						
	+	1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Travesía del río

- Compara los resultados del gráfico experimental de todo el curso con el del gráfico ideal.
- Según este último gráfico, ¿qué resultado es el más esperado al lanzar los dados y sumar el puntaje?
- ¿Existe alguna forma de ubicar las fichas en el juego para que tengas mejor chance de ganar?

Travesía del río

Ejemplo



Travesía del río

Definición clásica de probabilidad

- Llevar los resultados a frecuencias relativas

Suma	Frecuencia	Frecuencia relativa
2	2	2/29 = 0,069
3	2	2/29 = 0,069
4	0	0/29 = 0,0000
5	3	3/29 = 0,1034
6	5	5/29 = 0,1724
7	4	4/29 = 0,1379
8	4	4/29 = 0,1379
9	4	4/29 = 0,1379
10	3	3/29 = 0,1034
11	2	2/29 = 0,069
12	0	0/29 = 0,0000
	29	

Suma	Frecuencia	Frecuencia relativa
2	1	1/36 = 0,0278
3	2	2/26 = 0,0556
4	3	3/36 = 0,0833
5	4	4/36 = 0,1111
6	5	5/36 = 0,1389
7	6	6/36 = 0,1667
8	5	5/36 = 0,1389
9	4	4/36 = 0,1111
10	3	3/36 = 0,0833
11	2	2/26 = 0,0556
12	1	1/36 = 0,0278

Travesía del río

- https://www.geogebra.org/m/ga3xymke#material/Kt952EbV

Retomar definición frecuencial de probabilidad

Travesía del río

- **Consideraciones:**
- Las frecuencias empíricas de cada resultado posible pueden variar considerablemente. Esto es parte del aprendizaje.
- La estrategia no siempre es efectiva, puede garantizar una mayor probabilidad de ganar, pero se puede perder. Es parte del juego y del azar.
- Las simulaciones en GeoGebra permiten concluir que, aun realizando un gran número de repeticiones, podemos no llegar a la probabilidad teórica.

Travesía del río

- Utilizar otros dados

+	Dado 2: 1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14

suma	frecuencia
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	6
9	6
10	5
11	4
12	3
13	2
14	1

19

19

Travesía del río

- Utilizar otros dados

+	Dado 2: 1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10
7	8	9	10	11
8	9	10	11	12

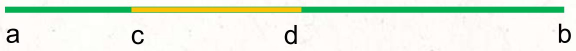
suma	frecuencia
2	1
3	2
4	3
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	3
11	2
12	1

20

Ruletas

- **Probabilidad geométrica**

- Cociente entre la medida del conjunto de resultados favorables sobre la medida del conjunto de resultados posibles (en un espacio equiprobable)



Dado un punto al azar sobre el segmento $\overline{ab}$, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a $\overline{cd}$?

21

Ruletas

Ruletas

Una sola ruleta: https://www.geogebra.org/m/ZDuHq64w

Una ruleta y gráfico de barras: https://www.geogebra.org/m/WCdF9VHU

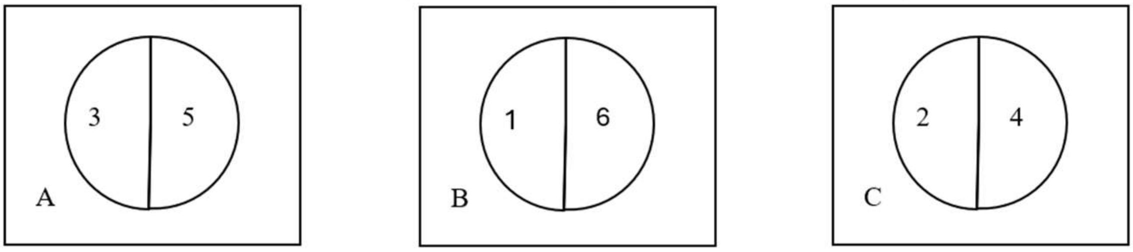
Dos ruletas: https://www.geogebra.org/m/RyfTuQCK

22

22

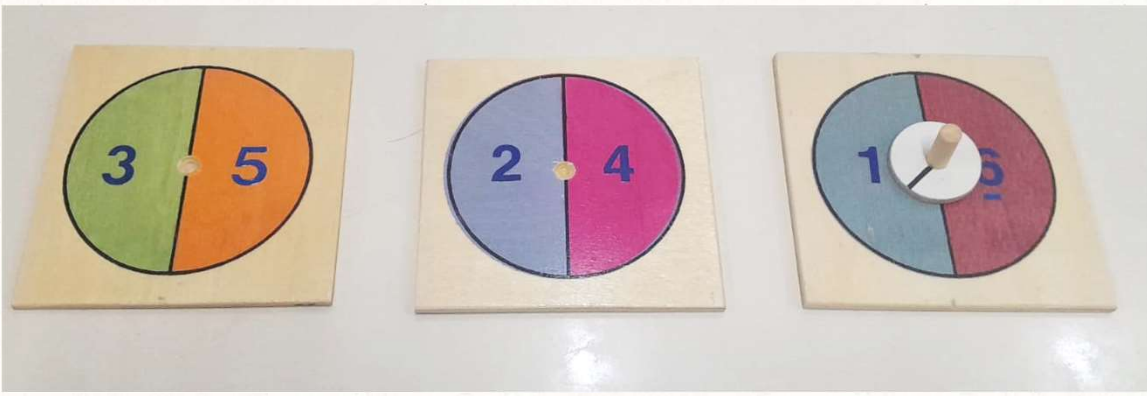
Ruletas

El primer jugador elige una de las tres ruletas. El segundo elige una de las dos que quedan. Si hay un tercer jugador, debe elegir la que queda. Se hacen girar las ruletas y gana el que mayor puntuación obtiene.



Ruletas

Material concreto:



Ruletas

La idea de utilizar el material concreto es que los jugadores experimenten diferentes estrategias.

Es claro que la probabilidad de cada resultado en cada ruleta es ½.

Lo que no es evidente a simple vista es qué ruleta conviene elegir y si es más conveniente elegir primero o segundo.

Observar qué registros toman los alumnos, sería bueno que anoten qué ruletas se eligen, qué resultados obtuvieron y quién ganó.

Ruletas

RULETAS ELEGIDAS	RESULTADO	PROBABILIDAD DEL RESULTADO	QUIÉN GANA
	A B		
A y B	3 1	$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	A
	3 6		
	5 1		
	5 6		
	A C		
A y C			
…			

Ruletas

RULETAS ELEGIDAS	RESULTADO	PROBABILIDAD DEL RESULTADO	QUIÉN GANA
	A B		
A y B	3 1	½ * ½ = ¼	A
	3 6	¼	B
	5 1	¼	A
	5 6	¼	B
	A C		
A y C	3 2	¼	A
	3 4	¼	C
	5 2	¼	A
	5 4	¼	A
	B C		
B y C	1 2	¼	C
	1 4	¼	C
	6 2	¼	B
	6 4	¼	B

P(gana A) = ½
P(gana B) = ½

P(gana A) = ¾
P(gana C) = ¼

P(gana B) = ½
P(gana C) = ½

Ruletas

A y B P(gana A) = ½ P(gana B) = ½

A y C P(gana A) = ¾ P(gana C) = ¼

B y C P(gana B) = ½ P(gana C) = ½

Estrategias:

Si se elige primero, conviene la ruleta A

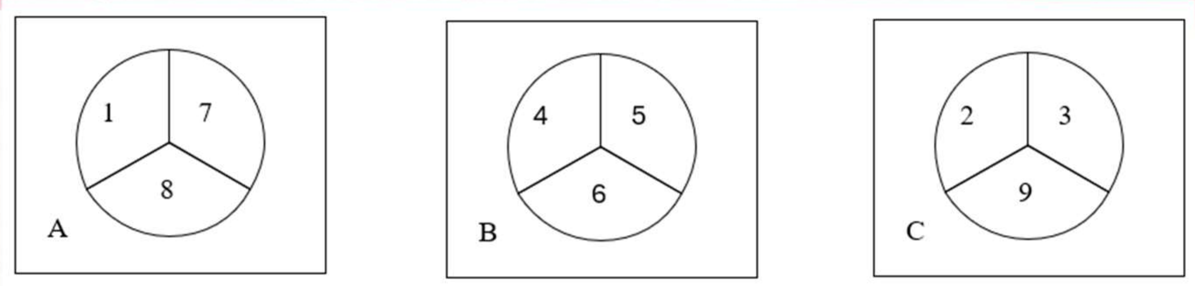
Si se elige segundo:

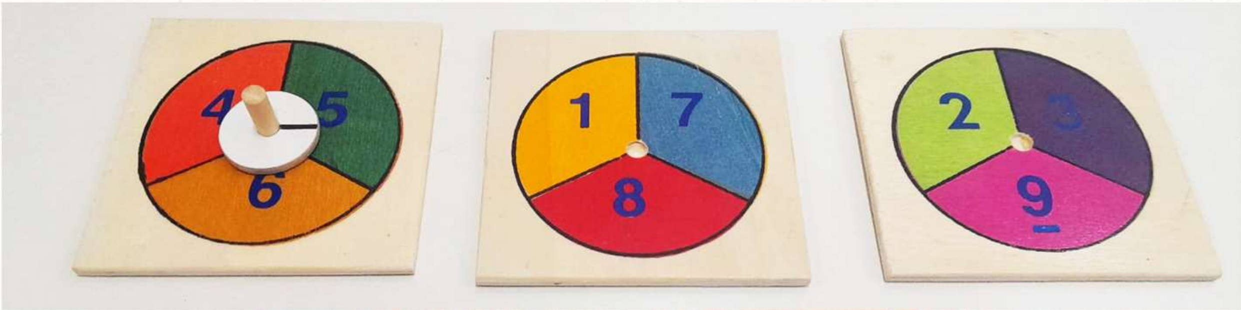
Si el primero eligió A, conviene B

Si el primero eligió B, es lo mismo cualquiera

Si el primero eligió C, conviene A

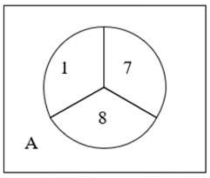
Ruletas

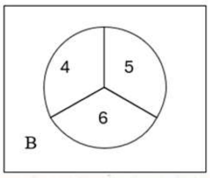




Ruletas

RULETAS ELEGIDAS	RESULTADO		PROB	QUIÉN GANA
	A	**B**		
A y B	1	4	1/9	
	1	5		
	1	6		
	7	4		
	7	5		
	7	6		
	8	4		
	8	5		
	8	6		



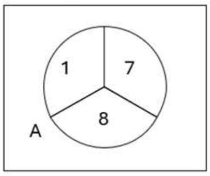


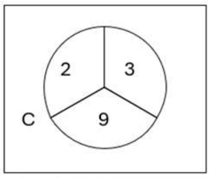
P(gana A) =

P(gana B) =

Ruletas

RULETAS ELEGIDAS	RESULTADO		PROB	QUIÉN GANA
	A	**C**		
A y C	1	2		
	1	3		
	1	9		
	7	2		
	7	3		
	7	9		
	8	2		
	8	3		
	8	9		



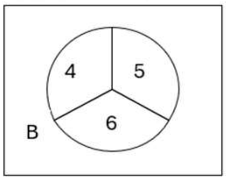


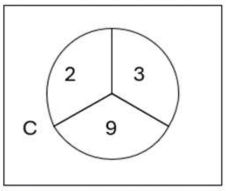
P(gana A) =

P(gana C) =

Ruletas

RULETAS ELEGIDAS	RESULTADO		PROB	QUIÉN GANA
	B	**C**		
B y C	4	2	1/9	
	4	3		
	4	9		
	5	2		
	5	3		
	5	9		
	6	2		
	6	3		
	6	9		





P(gana B) =

P(gana C) =

RULETAS ELEGIDAS	RESULTADO		PROB	QUIÉN GANA
	A	B		
A y B	1	4	1/9	B
	1	5		B
	1	6		B
	7	4		A
	7	5		A
	7	6		A
	8	4		A
	8	5		A
	8	6		A
	A	C		
A y C	1	2		C
	1	3		C
	1	9		C
	7	2		A
	7	3		A
	7	9		C
	8	2		A
	8	3		A
	8	9		C
	B	C		
B y C	4	2		B
	4	3		B
	4	9		C
	5	2		B
	5	3		B
	5	9		C
	6	2		B
	6	3		B
	6	9		C

Ruletas

A y B
P(gana A) = 6/9
P(gana B) = 3/9

A y C
P(gana A) = 4/9
P(gana C) = 5/9

B y C
P(gana B) = 6/9
P(gana C) = 3/9

Ruletas

A y B
P(gana A) = 6/9
P(gana B) = 3/9

A y C
P(gana A) = 4/9
P(gana C) = 5/9

B y C
P(gana B) = 6/9
P(gana C) = 3/9

Estrategias:

Si se elige primero: ?????

Si se elige segundo:

Si el primero elige A, conviene C

Si el primero elige B, conviene A

Si el primero elige C, conviene B

Toma de Decisiones

Certeza

Cada acto disponible para quien toma la decisión tiene consecuencias que pueden ser conocidas previamente con certeza.

Riesgo

Para un determinado un problema, se puede especificar la probabilidad de ciertos hechos, identificar soluciones y enunciar la probabilidad de que cada solución dé los resultados deseados.

Incertidumbre

Existen variables acerca de las cuales quienes toman las decisiones tiene poca o ninguna información.

No puede predecirse el futuro sobre la base de experiencias pasadas.

Toma de Decisiones

En **condiciones de incertidumbre**, las decisiones pueden estar influidas por diferentes causas como estratégicas, políticas o económicas. Asimismo, pueden estar influidas por cuestiones propias del decisor, tales como la forma en la que asigna probabilidades a los sucesos, su optimismo o pesimismo respecto a los resultados de sus decisiones o su aversión al riesgo entre otras causas.

Para los procesos de toma de decisiones en condiciones de incertidumbre, existen criterios que ayudan a los decisores.

Criterio de Laplace

Criterio de Hurwicz

Criterio de Wald

Criterio de Savage

Toma de Decisiones

- Los juegos de estrategia permiten tomar decisiones conociendo la probabilidad de los resultados posibles.
- Se complementa con juegos que incluyan el concepto de Esperanza Matemática.
- Se propicia la construcción de esquemas mentales.

APLICACIONES

MEDICINA EVALUAR RIESGOS – PRONÓSTICOS PRECISOS

ECONOMÍA EVALUAR RIESGOS

INGENIERÍA EVALUAR FIABILIDAD DE SISTEMAS-GARANTIZAR CALIDAD DE PRODUCTOS

EDUCACIÓN PREDICCIÓN DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO

RECURSOS

- Shodor Education Foundation
  http://www.shodor.org
- Maths is Fun – Probabilidad
  https://www.mathsisfun.com
- ThatQuiz
  https://www.thatquiz.org

¡¡MUCHAS GRACIAS!!

lavalle.andrea@faea.uncoma.edu.ar
roxanna.zuliani@faea.uncoma.edu.ar